概率论第 2 次习题课讲义

宗语轩

2022 秋, USTC

1 作业讲评

注 1. 由于本教材习题配套千题解解答: **Grimmett&Stirzaker-1000 Probability** (其电子版已传至群文件中), 因此我只对千题解中有问题或者过于简略的解答所对应的作业题、补充题以及其他值得讲解的作业题给出补充或解答, 其余作业题请大家自行参考千题解.

注 2. 从很多同学的作业中可以看出大家的概率语言书写不规范, 甚至一些同学只列式而没有附上任何说明. 对于诸如古典概型等带有事件的概率问题, 归根结底是要将事件运算转化成集合运算. 同时, 一定要把事件描述准确清楚, 这部分具体参考上次习题课讲义. 涉及到带有分析味的概率问题时, 也要用" 分析" 类语言表述规范.

1.4.7 最后一步计算要用到 $x(x-1)=\frac{1}{3}((x+1)x(x-1)-x(x-1)(x-2))$.

1.5.2 证明相互独立时要分四个不同的指标和三个不同的指标两类讨论.

1.5.7 (c),(d) 要把数值具体算出来.

(c) 设男孩概率为 p, 女孩概率为 $q=1-p$, 则 $P(A)=p^3+q^3$, $P(B)=q^3+3pq^2$, $P(C)=1-p^3-q^3$. $P(AB)=q^3$, $P(BC)=3pq^2$, $P(AC)=0$. 所以当 $p\in(0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1)$ 时结论不成立.

(d) $P(A)=\frac{1}{8}$, $P(B)=\frac{5}{16}$, $P(C)=\frac{7}{8}$. $P(AB)=\frac{1}{16}$, $P(BC)=\frac{1}{4}$, $P(AC)=0$. 易知结论不成立.

1.7.3 见 Notes(递推法) 或者第 1 次习题课讲义**例 1.3**

1.8.20 $p_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-2p)^n$

[0]个人主页: http://home.ustc.edu.cn/~zyx240014/.
发现错误欢迎联系: zyx240014@mail.ustc.edu.cn.

补充题 1 有一均匀硬币, 甲掷 $n+1$ 枚硬币, 乙掷 n 枚硬币, 求甲掷出的硬币正面数 $H_{甲}$ 比乙掷出的硬币正面数 $H_{乙}$ 多的概率.

解. 先让甲、乙都掷 n 枚硬币, 记 $H'_{甲}$ 为甲投掷硬币的正面数, 则有

$$p := \mathbb{P}(H'_{甲} > H_{乙}) = \mathbb{P}(H'_{甲} < H_{乙})$$

故

$$\mathbb{P}(H'_{甲} = H_{乙}) = 1 - 2p.$$

所以

$$\mathbb{P}(H_{甲} > H_{乙}) = \mathbb{P}(H'_{甲} > H_{乙}) + \mathbb{P}(H'_{甲} = H_{乙}, \text{甲抛掷第}n+1\text{枚硬币为正面}) = p + \frac{1}{2}(1-2p) = \frac{1}{2}.$$

□

另解. 记 $A = \{H_{甲} > H_{乙}\}$, $B = \{T_{甲} > T_{乙}\}$, 可知 A 与 B 对称, 故 $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$. 另一方面, 在甲只比乙多一枚硬币的条件下, 有 $B^c = A$. 故 $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1$, 即得 $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{2}$. □

另解. 设 $H_{甲} = k + l, H_{乙} = k, 0 \leqslant k \leqslant n, l \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(H_{甲} > H_{乙}) &= \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{l=1}^{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+l} \binom{n}{k} = \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{l=1}^{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{n+1-k-l} \binom{n}{k} \\
&= \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{l=1}^{n+1} \binom{2n+1}{n+1-l} = \frac{1}{2^{2n+1}} \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

补充题 2 已知 X, Y 是随机变量，证明: $\min\{X, Y\}$, $\max\{X, Y\}$ 为随机变量.

解. 对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有 $\{X \leqslant x\} \in \mathcal{F}, \{y \leqslant x\} \in \mathcal{F}$. 故有

$$\begin{aligned}
\{\min\{X, Y\} \leqslant x\} = \{X \leqslant x\} \cup \{Y \leqslant x\} \in \mathcal{F}, \\
\{\max\{X, Y\} \leqslant x\} = \{X \leqslant x\} \cap \{Y \leqslant x\} \in \mathcal{F}.
\end{aligned}$$

□

另解. 注意到

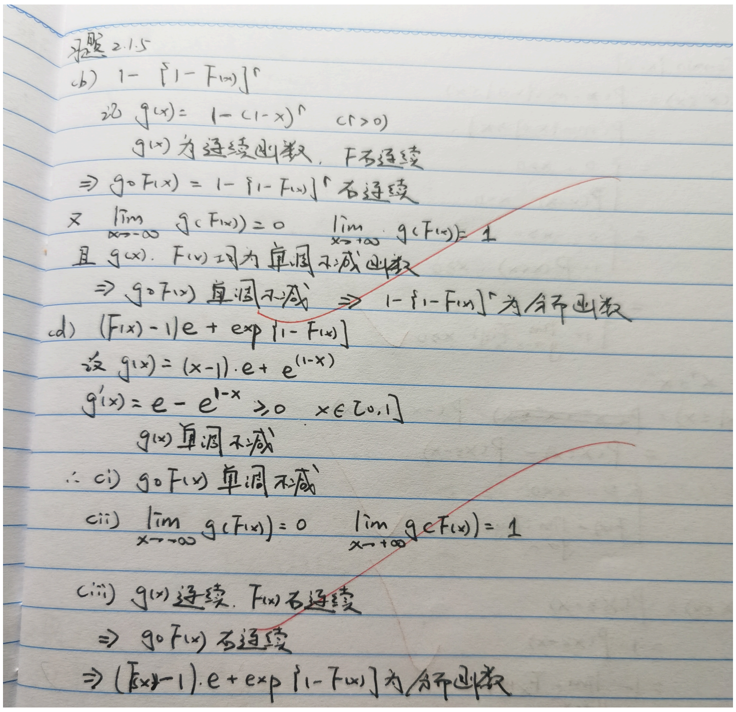
$$\max\{X, Y\} = \frac{X+Y}{2} + \frac{|X-Y|}{2}, \quad \min\{X, Y\} = \frac{X+Y}{2} - \frac{|X-Y|}{2}.$$

利用 $cX, X+Y, |X|$ 是随机变量 (自行验证) 即可. □

注. 证明随机变量的方法: 把满足条件的集合放在一起, 证明其构成了 σ-代数. 由此, 对随机变量 X_n, 亦可证明 $\sup\limits_{n \geqslant 1} X_n$, $\inf\limits_{n \geqslant 1} X_n$, $\limsup\limits_{n \to +\infty} X_n$, $\liminf\limits_{n \to +\infty} X_n$ 均为随机变量.

2.1.4 FG 是分布函数, 需要分别验证其三条性质.

2.1.5



习题 2.1.5

(b) $1-[1-F(x)]^r$

记 $g(x)=1-(1-x)^r \quad (r>0)$

$g(x)$ 为连续函数, F 右连续

$\Rightarrow g\circ F(x)=1-[1-F(x)]^r$ 右连续

又 $\lim\limits_{x\to-\infty} g(F(x))=0 \quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(F(x))=1$

且 $g(x)$, $F(x)$ 均为单调不减函数

$\Rightarrow g\circ F(x)$ 单调不减 $\Rightarrow 1-[1-F(x)]^r$ 为分布函数

(d) $(F(x)-1)e+\exp[1-F(x)]$

设 $g(x)=(x-1)\cdot e+e^{(1-x)}$

$g'(x)=e-e^{1-x}\geqslant 0 \quad x\in[0,1]$

$g(x)$ 单调不减

$\therefore$ (i) $g\circ F(x)$ 单调不减

(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(F(x))=0 \quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(F(x))=1$

(iii) $g(x)$ 连续, $F(x)$ 右连续

$\Rightarrow g\circ F(x)$ 右连续

$\Rightarrow (F(x)-1)\cdot e+\exp[1-F(x)]$ 为分布函数

2.3.3 见本讲义第 2 部分

2.4.2 Y, Z 的分布函数:

$$F_Y(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ F(x), & a\leqslant x<b,\\ 1, & x\geqslant b.\end{cases}$$

$$b\leqslant 0:\ F_Z(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x>0.\end{cases}, \qquad b>0:\ F_Z(x)=\begin{cases}0, & x<-b,\\ F(x)-F(-b-0), & -b\leqslant x<0,\\ 1-F(b)+F(x), & 0\leqslant x<b,\\ 1, & x\geqslant b.\end{cases}$$

所以当 $a\to-\infty, b\to+\infty$ 时, $F_Y(x), F_Z(x)\to F(x)$ (逐点收敛).

注. 关于 $Z, b>0$ 时, 注意到

$$\begin{aligned}-b\leqslant x<0:\ \{Z\leqslant x\}&=(\{|X|\leqslant b\}\cap\{X\leqslant x\})=\{-b<X\leqslant x\}\\ 0\leqslant x<b:\ \{Z\leqslant x\}&=\{|X|>b\}\sqcup(\{|X|\leqslant b\}\cap\{X\leqslant x\})=\{|X|>b\}\sqcup\{-b<X\leqslant x\}\\ &=\{X\leqslant x\}\sqcup\{X>b\}\end{aligned}$$

2 专题选讲

2.1 随机变量与分布函数

定义 2.1. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), X : \Omega \to \mathbb{R}$, 若 $\forall x \in \mathbb{R}$ 有 $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}$, 则称 X 为 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的一个随机变量.

注. 一般用 $\{X \le x\}$ 表示 $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\}$, 但是我们不能 "忘记" 样本空间.

定义 2.2. 设 X 为 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上随机变量, 则称函数 $F_X(x) = \mathbb{P}(\{X \le x\})$ 为 X 的(概率) 分布函数.

区分随机变量 & 分布函数: 若已知随机变量, 我们必然能得到其分布函数. 反之存在性也满足 (见后), 但不能唯一确定! 分布函数会 "忘记" 样本空间! 下面一个简单的例子即可说明:

例 2.1. 掷一枚均匀硬币.$\Omega = \{H, T\}$, 随机变量 X, Y 满足 $X(H) = 1, X(T) = -1$, $Y(H) = -1, Y(T) = 1$. 我们有

$$F_X(x) = F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \dfrac{1}{2}, & -1 \leqslant x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1, \end{cases}$$

但是 $X \neq Y$.

回顾一下分布函数的性质:

引理 2.1. 设 X 是随机变量, $F(x)$ 为其分布函数, 则有

(1) 单调递增: 若 $x < y$, 则 $F(x) \le F(y)$,

(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$,

(3) 右连续: $F(x + 0) = F(x)$.

事实上, 满足上述三条引理的一元函数称为分布函数 $F(x)$, 可以找到一个概率空间及随机变量 X, 使得 X 的分布函数是 $F(x)$.

$X \sim U(0, 1)$((0,1) 上均匀分布), 当分布函数 F 严格递增时, $Y = F^{-1}(X)$ 有分布函数 F.

$$\mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(F^{-1}(X) \le y) = \mathbb{P}(X \le F(y)) \xlongequal{F(\mathbb{R}) \subseteq (0,1)} F(y)$$

更一般地, 对分布函数 $F(x)$, 定义

$$F^{-1}(y) = \sup\{x \mid F(x) < y\}, \ \ y \in (0, 1)$$

显然 $F^{-1}(y)$ 单调递增, 且我们有如下事实: 设 F 为分布函数, $X \sim U(0, 1)$, 则 $Y = F^{-1}(X)$ 的分布函数为 F.

问题: $\mathbb{P}(F^{-1}(X) \le y) \overset{?}{=} \mathbb{P}(X \le F(y))$

提示. 只需验证 $F^{-1}(y) > x \iff y > F(x)$.

$\Longrightarrow$: $\exists x_0$, 使得 $x < x_0 < F^{-1}(y)$. 利用 $F^{-1}(y)$ 上确界的定义知,

$$x_0 \in \{x \mid F(x) < y\}.$$

再利用 F 的单调性知, $F(x) \leqslant F(x_0) < y$.

$\Longleftarrow$: 利用 F 的右连续性知, $\exists \delta > 0$, 使得

$$y > F(x+\delta).$$

再利用 F^{-1} 的定义知, $F^{-1}(y) \geqslant x + \delta > x$.

注. 此结论表明均匀分布可用来产生其他分布, 在随机模拟中相当重要.

蒙特卡洛模拟: $g:[0,1] \to [0,1]$ 连续函数, 要计算 $I = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$, 其中 (X,Y) 为 $[0,1]\times[0,1]$ 上均匀分布, $A = \{(x,y): 0 \le y \le g(x), x \in [0,1]\}$. 向 $[0,1]^2$ 上随机投点 N 次, 落入 A 的次数记为 N_A, 即 $Y \leqslant g(x)$ 时 (X,Y) "成功". 频率稳定性建议:

$$\frac{N_A}{N} \to I = \mathbb{P}(A).$$

例 2.2 (**Buffon 问题**)**.** 平面上有间距为 2 平行线, 投长为 1 的针, 试求针与线相交的概率?

解. x 表示针的中点与最近一条平行线的距离, θ 表示针与线夹角, 明显

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad G = \{(\theta,x): \theta \in [0,\pi], x \in [0,1]\}$$

A 表示针与线相交: $A := \left\{(\theta,x) \in G : x \le \frac{1}{2}\sin\theta\right\}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|G|} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \int_0^{\frac{1}{2}\sin\theta} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}$$

□

定义 2.3. 以连续型为例. 设随机向量 (X,Y) 联合密度 $f(x,y)$, 则 X 的边缘密度:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y,$$

边缘分布:

$$F_X(x) = \lim_{y\to+\infty} F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)\mathrm{d}v.$$

给定 $X = x(f_X(x) > 0)$ 下 Y 的条件密度:

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}(\text{关于}y\text{构成密度函数})$$

条件分布:

$$F_{Y|X}(y \mid x) = \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,v)}{f_X(x)}\mathrm{d}v$$

离散型下定义类似. 由此可知, 对随机变量 X, Y, 若已知 $F_{X,Y}(x,y)$, 我们可以求得 $F_X(x), F_Y(y)$, $F_{X|Y}(x|y), F_{Y|X}(y|x)$. 反之,

$$F_X(x), F_Y(y) \nRightarrow F_{X,Y}(x,y), \quad F_X(x), F_{Y|X}(y|x) \Rightarrow F_{X,Y}(x,y).$$

注. $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) \nRightarrow \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)$.

例 2.3. 二元函数

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-y}, & 0 \leqslant x \leqslant y, \\ 1 - \mathrm{e}^{-y} - y\mathrm{e}^{-y}, & 0 \leqslant y \leqslant x, \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

是否为某随机向量 (X, Y) 的联合分布函数? 若是, 分别求出 X 和 Y 的分布函数; 若不是, 请说明理由.

解. $F(x,y)$ 连续且 $\lim\limits_{x,y \to -\infty} F(x,y) = 0$, $\lim\limits_{x,y \to +\infty} F(x,y) = 1$. 而

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \begin{cases} \mathrm{e}^{-y} & 0 \leqslant x \leqslant y, \\ 0 & 0 \leqslant y \leqslant x. \end{cases}$$

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \geqslant 0$. 因此 $F(x,y)$ 是一个联合分布, 并有

$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F(x,y) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad F_Y(y) = \lim_{x \to +\infty} F(x,y) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-y} - y\mathrm{e}^{-y}, & y \geqslant 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

□

2.2 离散型及期望方差

1 Bernoulli 分布 $\mathbb{P}(X=1) = p, \mathbb{P}(X=0) = 1-p$, 则

$$\mathbb{E}[X] = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p,$$

$$\mathbb{E}[X^2] = p \cdot 1^2 + (1-p) \cdot 0^2 = p, \quad \Longrightarrow Var(X) = p(1-p)$$

2 二项分布 $X \sim B(n,p), \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, k = 0, 1, \cdots, n$ 这里 $p \in (0,1), p+q=1$. X 服从参数为 (n,p) 的二项分布. 其中 $B(1,p)$ 即为 Bernoulli 分布.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-1-k)!} p^{k+1} q^{n-1-k}$$

$$\begin{aligned}
&= np\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^k q^{n-1-k} = np \\
\mathbb{E}[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = n(n-1)p^2 \\
\mathbb{E}[X^2] &= np(np+q), Var(X) = npq = np(1-p)
\end{aligned}$$

注 1. 二项分布具有**可加性**: 设 $X \sim B(M,p), Y \sim B(N,p)$ 且 X,Y 相互独立，则有 $X+Y \sim B(M+N,p)$. (对任意有限个均成立).

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k, Y=n-k) = \sum_{k=0}^{n}\binom{M}{k}p^k q^{M-k}\binom{N}{n-k}p^{n-k}q^{N-n+k} \\
&= p^n q^{M+N-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{M}{k}\binom{N}{n-k} \\
&= \binom{M+N}{n}p^n q^{M+N-n}.
\end{aligned}$$

注 2. 二项分布**可分解**: $X \sim B(n,p)$ 可以分解成 n 个相互独立且参数为 p 的 Bernoulli 分布之和, 即

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \qquad X_r \text{ i.i.d } \sim B(1,p),\ r = 1,\cdots,n.$$

因此, 我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[X_k] = n\mathbb{E}[X_1] = np, \\
Var(X) &= Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \xlongequal{\text{独立}} \sum_{k=1}^{n} Var(X_k) = nVar(X_1) = np(1-p).
\end{aligned}$$

上例可知, 期望的线性性非常重要. 对于随机变量 X,Y, 有时 $X+Y$ 的分布较为复杂, 而 X 和 Y 的分布相对好入手. 转化成如下形式即可:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{d}F_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{d}F_X(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{d}F_Y(t)$$

同时注意到, 期望只与分布有关. 若 X,Y 同分布, 则两者期望相同.

3 几何分布 $\quad \mathbb{P}(X=k) = pq^{k-1}, k = 1,2,\cdots, p \in (0,1),\ p+q=1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} \xlongequal{\text{绝对收敛}} p\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' = p\left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}, \\
\mathbb{E}[X(X+1)] &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)pq^{k-1} \xlongequal{\text{绝对收敛}} p\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^{k+1}\right)'' = p\left(\frac{q^2}{1-q}\right)'' = \frac{2p}{(1-q)^3} = \frac{2}{p^2}, \\
Var(X) &= \frac{1-p}{p^2}.
\end{aligned}$$

注. 离散情况下, 几何分布 $\Longleftrightarrow$ 无记忆性.

$\Rightarrow$: 无记忆性:

$$\mathbb{P}(X=m+k \mid X>m)=\frac{\mathbb{P}(X=m+k)}{\mathbb{P}(X>m)}=\frac{pq^{m+k-1}}{q^m}=pq^{k-1}=\mathbb{P}(X=k).$$

$\Leftarrow$: 记 $p=\mathbb{P}(X=k+1 \mid X>k)$ 与 k 无关, 令 $r_k=\mathbb{P}(X>k)(r_0=1)$, 则

$$p=\frac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X>k)}=\frac{r_k-r_{k+1}}{r_k}.$$

解得 $r_k=(1-p)^k$. 因此 $\mathbb{P}(X=k)=r_{k-1}-r_k=p(1-p)^{k-1}=pq^{k-1}$.

4 泊松分布

$X\sim P(\lambda), \mathbb{P}(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\cdots,\lambda>0.$

$$\mathbb{E}[X]=\sum_{k=1}^{+\infty}k\mathbb{P}(X=k)=\lambda\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}=\lambda,$$
$$\mathbb{E}[X(X-1)]=\sum_{k=1}^{+\infty}k(k-1)\mathbb{P}(X=k)=\lambda^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\lambda}=\lambda^2 \qquad \Longrightarrow Var(X)=\lambda.$$

注 1. 泊松分布具有可加性: 设 $X\sim P(\lambda_1), Y\sim P(\lambda_2)$ 且 X,Y 相互独立，则有 $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$. (对任意有限个均成立).

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=n)&=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k,Y=n-k)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda_1)^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{(\lambda_2)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}\\&=\frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\lambda_1)^k(\lambda_2)^{n-k}\\&=\frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^n.\end{aligned}$$

注 2. 泊松分布亦可分解, 泊松分布在随机选择下具有不变性. 如下例:

泊松翻转: 掷硬币 N 次, $N\sim P(\lambda)$,$\mathbb{P}(H)=p$, 记 X,Y 为 H,T 出现次数. 则 X 与 Y 独立, 因为

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=x,Y=y)&=\mathbb{P}(X=x,Y=y,N=x+y)\\&=\mathbb{P}(X=x,Y=y\mid N=x+y)\mathbb{P}(N=x+y)=\binom{x+y}{x}p^xq^y\frac{\lambda^{x+y}}{(x+y)!}e^{-\lambda}\\&=\frac{(\lambda p)^x}{x!}e^{-\lambda p}\cdot\frac{(\lambda q)^y}{y!}e^{-\lambda q}.\end{aligned}$$

因此

$$\mathbb{P}(X=x)=\sum_{y=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\frac{(\lambda p)^x}{x!}e^{-\lambda p},\quad \mathbb{P}(Y=y)=\frac{(\lambda q)^y}{y!}e^{-\lambda q}.$$

X 与 Y 独立, $N=X+Y$ 且有 $X\sim P(\lambda p), Y\sim P(\lambda q)$.

例 2.4. 已知随机变量 X, Y, 且 X, Y 相互独立. 求如下两情形的条件概率 $\mathbb{P}(X=k|X+Y=j)$:

(1) $X \sim B(m,p), Y \sim B(n,p)$;

(2) $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$.

解. (1) 利用 $X+Y \sim B(m+n,p)$, 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k|X+Y=j) &= \frac{\mathbb{P}(X=k,X+Y=j)}{\mathbb{P}(X+Y=j)} = \frac{\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=j-k)}{\mathbb{P}(X+Y=j)} \\ &= \frac{\binom{m}{k}p^k(1-p)^{m-k}\binom{n}{j-k}p^{j-k}(1-p)^{n-j+k}}{\binom{m+n}{j}p^j(1-p)^{m+n-j}} \\ &= \frac{\binom{m}{k}\binom{n}{j-k}}{\binom{m+n}{j}}\end{aligned}$$

(2) 利用 $X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2, p)$, 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k|X+Y=j) &= \frac{\mathbb{P}(X=k,X+Y=j)}{\mathbb{P}(X+Y=j)} = \frac{\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=j-k)}{\mathbb{P}(X+Y=j)} \\ &= \frac{\frac{\lambda_1^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{j-k}}{(j-k)!}\mathrm{e}^{-\lambda_2}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^j}{j!}\mathrm{e}^{-\lambda_1+\lambda_2}} \\ &= \binom{j}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{j-k}.\end{aligned}$$

□

3 补充习题

1 定义实数 m 成为分布函数 F 的中位数, 若

$$F(m-0) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant F(m).$$

(1) 给出 $[0,1]$ 上均匀分布和二项分布 $B\left(n,\frac{1}{2}\right)$ 的中位数;

(2) 证明分布函数至少有一个中位数, 且中位数集合构成一个闭区间.

解. (1) $U[0,1]$ 上的中位数是 $\frac{1}{2}$, $B\left(n,\frac{1}{2}\right)$ 的中位数是 $\begin{cases}[\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2}], n\text{为奇数} \\ \frac{n}{2}, n\text{为偶数}\end{cases}$. (自行验证)

(2) 定义 $m=\sup\left\{x:F(x)<\frac{1}{2}\right\}$, 由 $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$ 可知 m 存在. 由 m 的上确界定义知, 对 $\forall x<m$, 均有 $F(x)<\frac{1}{2}$. 若 $F(m)<\frac{1}{2}$, 由 F 的右连续性知, $\exists m_0>m$, 使得 $F(m_0)<\frac{1}{2}$, 这与 m 的上确界性矛盾. 因此 $F(m)\geqslant\frac{1}{2}$, 故 m 为 F 的中位数.

再定义 $M=\sup\left\{x:F(x)\leqslant\frac{1}{2}\right\}$. 对 $\forall x>M$, 均有 $F(x)>\frac{1}{2}$; 对 $\forall x<M$, 均有 $F(x)\leqslant\frac{1}{2}$. 由定义知 $M\geqslant m$, 所以 $F(M)\geqslant F(m)\geqslant\frac{1}{2}$. 所以 M 为中位数, 且中位数集合为闭区间 $[m,M]$. □

2 独立重复伯努利试验中, p 为每次试验成功的概率, S_n 表示第 n 次试验成功时试验总次数. 求:

(1) 条件概率 $\mathbb{P}(S_{n+1}=k|S_n=j)$;

(2) 条件概率 $\mathbb{P}(S_n=k|S_{n+1}=j)$.

解. 注意到

$$\mathbb{P}(S_n=j)=p\cdot\binom{j-1}{n-1}\cdot p^{n-1}(1-p)^{j-n}=\binom{j-1}{n-1}p^n(1-p)^{j-n},\cdot j\geqslant n.$$

因而

$$\mathbb{P}(S_{n+1}=k|S_n=j)=\frac{\mathbb{P}(S_{n+1}=k,S_n=j)}{\mathbb{P}(S_n=j)}=\frac{\binom{j-1}{n-1}p^n(1-p)^{j-n}\cdot(1-p)^{k-j-1}p}{\binom{j-1}{n-1}p^n(1-p)^{j-n}}=(1-p)^{k-j-1}p$$

及因而

$$\mathbb{P}(S_n=k|S_{n+1}=j)=\frac{\mathbb{P}(S_n=k,S_{n+1}=j)}{\mathbb{P}(S_{n+1}=j)}=\frac{\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}\cdot(1-p)^{j-k-1}p}{\binom{j-1}{n}p^{n+1}(1-p)^{j-n-1}}=\frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{j-1}{n}}.$$

□

注. 通过上述计算可知, $\mathbb{P}(S_{n+1}=k|S_n=j)$ 服从几何分布以及仅和 $k-j$ 有关, 即具有马氏性: 未来决定于现在的状态, 与过去无关.

3 有足够多套同类型的卡片组, 每套卡片组共 n 张各不相同的卡片, 每花 1 张券就可以在完整的一套卡片组中随机抽取 1 张卡片. 某人想集齐一套完整的卡片组, 设他恰好集齐卡片组时花费的总券数为 X_n, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\mathbb{E}[X_n]}{n\ln n}$.

解. 记收齐第 $i-1$ 张卡片之后到收齐第 i 张卡片间花费的券数为 η_i, 则有

$$X_n=\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_n.$$

同时, η_i 服从几何分布

$$\mathbb{P}(\eta_i=k)=\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-1}\frac{n-i+1}{n},\quad k=1,2,\cdots$$

因此

$$\mathbb{E}[\eta_i] = \frac{n}{n-i+1}.$$

故有

$$\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\eta_k] = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n-k+1} = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

利用

$$\ln n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \ln(n+1)$$

夹逼即得

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[X_n]}{n \ln n} = 1.$$

□

4 互素概率问题浅谈 *

先看这样一个简单的例子:

例 4.1. 对 $N \geqslant 1$, 记 $\mathbb{P}_N$ 为 $\Omega_N = \{1, 2, \cdots, N\}$ 上均匀概率测度, 通过模 q 的余数可定义随机变量

$$\pi_q : \Omega_N \to \mathbb{Z}_q = \{0, 1, \cdots q-1\}.$$

对两个不同的素数 q_1 和 q_2, 证明 π_{q_1} 和 π_{q_2}渐近独立, 即 $\forall a_i \in \mathbb{Z}_{q_i}$, 有

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}_N(\pi_{q_1} = a_1, \pi_{q_2} = a_2) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}_N(\pi_{q_1} = a_1) \times \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}_N(\pi_{q_2} = a_2).$$

证明. 我们有

$$\mathbb{P}_N(\pi_{q_i} = a_i) = \begin{cases} \left[\dfrac{N}{q_i}\right] \cdot \dfrac{1}{N}\,, & a_i = 0, \\ \left(\left[\dfrac{N-a_i}{q_i}\right] + 1\right) \cdot \dfrac{1}{N}\,, & 1 \leqslant a_i \leqslant q-1, \\ 0\,, & \text{else}. \end{cases}$$

因为 q_1, q_2 均为素数, 利用中国剩余定理可知, $\exists 0 \leqslant a_3 \leqslant q_1 q_2 - 1$, 使得

$$\{\pi_{q_1} = a_1, \pi_{q_2} = a_2\} = \{\pi_{q_1 q_2} = a_3\}.$$

因此

$$\mathbb{P}_N(\pi_{q_1} = a_1, \pi_{q_2} = a_2) = \left[\frac{N-a_3}{q_1 q_2}\right] \cdot \frac{1}{N} \text{ or } \left(\left[\frac{N-a_3}{q_1 q_2}\right] + 1\right) \cdot \frac{1}{N}$$

若 $a_i \notin [0, q_i - 1]$, 则题中两式等于 0 显然成立; 若 $a_i \in [0, q_i - 1]$, 对 $N \to +\infty$, 则题中两式等于 $\dfrac{1}{q_1 q_2}$, 亦成立. □

上周组合学课程作业中有这样一道题目, 和上例的渐近独立性有一丢神秘关联 (?

问题: 从不超过 N 的正整数中随机地选取两数 a,b, 记 a,b 互素的概率为 P_N. 则当 $N\to+\infty$ 时, $P_N\to\prod\limits_{\mathrm{i=1}}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{p_i^2}\right)=\dfrac{6}{\pi^2}$. 其中 p_i 为素数且依序从小到大排列.

先验证 $\prod\limits_{i=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{p_i^2}\right)$. 我们先看如下证明是否合理 (证明中所有独立性应给出证明, 这里先省略且假设成立), 其直接把 $N=+\infty$, 在所有正整数集的样本空间 Ω 上考虑此问题:

证明. 记事件 A_{p_i} 为 a 能被 p_i 整除, 则有 $\mathbb{P}(A_{p_i})=\dfrac{1}{p_i}$ 可以验证

$$\mathbb{P}(A_{p_i}A_{p_j})=\mathbb{P}(A_{p_i})\mathbb{P}(A_{p_j})$$

即 A_{p_i} 与 $A_{p_j}(i\neq j)$ 相互独立. 记事件 B_{p_j} 为 b 能被 p_j 整除, 类似 B_{p_i} 和 $B_{p_j}(i\neq j)$ 相互独立. 同时, 利用选数的随机性知,

$$\mathbb{P}(A_{p_k}B_{p_l})=\mathbb{P}(A_{p_k})\mathbb{P}(B_{p_l}).$$

记事件 C 表示 a,b 互素, 则有

$$C=\bigcap_{i=1}^{\infty}(A_{p_i}^c\cup B_{p_i}^c)$$

而 $A_{p_i}^c, B_{p_i}^c$ 相互独立, 故有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}(A_{p_i}^c\cup B_{p_i}^c)\right)&=\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}\left((A_{p_i}^c\cup B_{p_i}^c)\right)=\prod_{i=1}^{\infty}(1-\mathbb{P}(A_{p_i}B_{p_i}))=\prod_{i=1}^{\infty}(1-\mathbb{P}(A_{p_i})\mathbb{P}(B_{p_i}))\\&=\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_i^2}\right).\end{aligned}$$

□

注. 最后一步中的 $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}(A_{p_i}^c\cup B_{p_i}^c)\right)=\mathbb{P}\left(\lim\limits_{N\to+\infty}\bigcap\limits_{i=1}^{N}(A_{p_i}^c\cup B_{p_i}^c)\right)\overset{?}{=}\lim\limits_{N\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{N}(A_{p_i}^c\cup B_{p_i}^c)\right)=\prod\limits_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}\left((A_{p_i}^c\cup B_{p_i}^c)\right)$ 以及 $\mathbb{P}(A_{p_i})=\dfrac{1}{p_i}$ 是否合理?

我们知道, 对于满足概率测度可列可加性的概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, 上式当然成立. 但是算术密度**并不满足可列可加性**. 具体为: Ω 为所有正整数集, 随机取一个正整数 k, $\mathbb{P}(\{k\})=a\geqslant 0$. 若 $\mathbb{P}$ 满足可列可加性, 则

$$\mathbb{P}(\Omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(\{k\})=0\text{ or }+\infty,$$

与概率的规范性 $\mathbb{P}(\Omega)=1$ 矛盾.

注意到原问题的概率空间 Ω_N 选取: 对 N, 均匀地选取一个 1 到 N 中的数字, 然后再让 N 趋于无穷. 有一种可行的方法是用 Jordan 公式进行剥 (暴) 蒜 (算), 见下:

证明. 记事件 $C^{(N)}$ 表示不超过 N 的正整数 a,b 互素, 事件 $A_i^{(N)}$ 表示素数 $p_i|\gcd(a,b)$, 并记 l 为使得 p_l 是不超过 N 的最大素数. 则对 $\forall 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant l$, 有

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=i_1}^{i_k}A_n\right)=\frac{\left\lfloor\dfrac{N}{\prod_{n=i_1}^{i_k}p_n}\right\rfloor^2}{N^2}.$$

利用 Jordan 公式, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C^{(N)})=\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{l}A_n^{(N)}\right)^c\right)&=1-\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{l}A_n^{(N)}\right)=1-\sum_{n=1}^{l}(-1)^n\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_n\leqslant l}\mathbb{P}(A_{i_1}^{(N)}\cdots A_{i_n}^{(N)})\\&=1-\sum_{n=1}^{l}(-1)^n\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_n\leqslant l}\frac{\left\lfloor\dfrac{N}{\prod_{k=i_1}^{i_n}p_k}\right\rfloor^2}{N^2}.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{P}(C^{(N)})-\prod_{i=1}^{l}\left(1-\frac{1}{p_i^2}\right)\right|&=\left|\mathbb{P}(C^{(N)})-1+\sum_{n=1}^{l}(-1)^n\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_n\leqslant l}\frac{\left(\dfrac{N}{\prod_{k=i_1}^{i_n}p_k}\right)^2}{N^2}\right|\\&=\frac{1}{N^2}\left|\sum_{n=1}^{l}(-1)^n\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_n\leqslant l}\left(\left(\frac{N}{\prod_{k=i_1}^{i_n}p_k}\right)^2-\left\lfloor\frac{N}{\prod_{k=i_1}^{i_n}p_k}\right\rfloor^2\right)\right|\\&\leqslant\frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{l}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_n\leqslant l}\frac{2N}{\prod_{k=i_1}^{i_n}p_k}\leqslant\frac{2}{N}\prod_{i=1}^{l}\left(1+\frac{1}{p_i}\right)\\&\leqslant\frac{3}{N}\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_l}\right)\\&\leqslant\frac{3}{N}\sqrt{\prod_{i=2}^{N+1}\left(1+\frac{1}{i}\right)}\\&\leqslant\frac{3\sqrt{N+1}}{N}\xrightarrow{N\to+\infty}0.\end{aligned}$$

而由 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i^2}$ 绝对收敛知, $\displaystyle\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_i^2}\right)$ 收敛, 故有 $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\mathbb{P}(C^{(N)})=\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_i^2}\right)$. □

注. 这里的样本空间是有限的, 故不会存在上述可列可加性的问题. 可以发现, 以上主要归结为:

$$(\Omega\text{下的})\mathbb{P}(C)\overset{?}{=\!=}\lim_{N\to+\infty}\mathbb{P}(C^{(N)})(\Omega_N\text{下的}).$$

除此之外, 能否考虑利用**例 4.1** 中的渐近独立性, 在 Ω_N 下类比之前的错证方法完成？现进行尝试:

记号基本同前. 记事件 A_{p_i} 为 a 能被 p_i 整除, 事件 B_{p_j} 为 b 能被 p_j 整除. 由**例 4.1** 知, A_{p_i} 与 $A_{p_j}(i\neq j)$ 渐近独立, B_{p_i} 和 $B_{p_j}(i\neq j)$ 渐近独立. 这里的渐近独立性可以推广到任意有限个. 同时, 利用选数的随机性知, A_{p_k}, B_{p_l} 相互独立. 同样记事件 $C^{(N)}$ 表示 a,b 互素, 并记 l 为使得 p_l 是不超过 N 的最大素数, 则有

$$C^{(N)}=\bigcap_{i=1}^{l}(A_{p_i}^c\cup B_{p_i}^c).$$

而 $A_{p_i}^c, B_{p_i}^c$ 相互独立. 我们看下式是否成立:

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\mathbb{P}(C^{(N)})&=\lim_{N\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{l}(A_{p_i}^c\cup B_{p_i}^c)\right)\overset{?}{=}\lim_{N\to+\infty}\prod_{i=1}^{l}\mathbb{P}\left((A_{p_i}^c\cup B_{p_i}^c)\right)=\lim_{N\to+\infty}\prod_{i=1}^{l}(1-\mathbb{P}(A_{p_i}B_{p_i}))\\&=\lim_{N\to+\infty}\prod_{i=1}^{l}(1-\mathbb{P}(A_{p_i})\mathbb{P}(B_{p_i}))=\lim_{N\to+\infty}\prod_{p_i\leqslant N}\left(1-\frac{1}{p_i^2}\right).\end{aligned}$$

对于固定的 l, 利用渐近独立性可知上式当然成立. 但这里的 l 实质是 $l(N)$, 即随 N 变化而变化, 所以上式未必成立. 最后猜测只能通过精细估计的方法一步步剥蒜. 数论方法的证明可以参考书目([3])中的 **Thm 332**(本质还是剥蒜). 若有其他方法欢迎一同探讨!

很好, 但 $\mathbb{P}(C)$ 究竟事什么呢?

~~可能确实取等但我也不到啊! 也许直接在所有正整数上考虑这个问题的话始终没有解决吧 (?~~

最后我们证明:

$$\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_i^2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

更一般地, 欧拉乘积公式:

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_i^s}\right)^{-1}.$$

证明. 利用

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_i^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p_i^2)^n},$$

有

$$\prod_{p_i\leqslant N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_i^2}}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=N+1}^{\infty}{}'\frac{1}{n^2}$$

其中

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}{}'\frac{1}{n^2}<\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

$\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty}{}'\frac{1}{n^2}$ 表示: 从 $n\geqslant N+1$ 起, 对每个 n 至多仅有一个 $\dfrac{1}{n^2}$ 在该级数内. 故有

$$0<\prod_{p_i\leqslant N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_i^2}}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}<\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 由夹逼原理知,

$$\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_i^2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

□

最后提供一道习题留给大家自行探究:

习题: 记 $\mathbb{P}$ 为所有正整数集 $\Omega=\{1,2,\cdots\}$ 上的加权概率测度, 其中正整数 n 的加权值是 $\frac{1}{n^2}$. 从所有正整数中随机选取正整数 a, 记事件 A_{p_i} 表示正整数 a 能被 p_i 整除.

(1) 对两个不同的素数 p_1 和 p_2, 证明 A_{p_1} 和 A_{p_2} 相互独立.

(2) 用概率方法证明

$$\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_i^2}}=\frac{\pi^2}{6}.$$

(3) 在加权概率测度 $\mathbb{P}$ 下, 从所有正整数中随机地选取两数 a,b, 求 a,b 互素的概率 P.

注. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛保证了加权概率测度 $\mathbb{P}$ 的良定.

提示. (2) 注意到 $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_{p_n}\right)=1-\frac{6}{\pi^2}$, (3) 用之前错证的方法即可.

参考书目:

[1] 李贤平, 陈子毅: 《概率论基础学习指导书》, 高等教育出版社, 2011.

[2] E. Kowalski: An introduction to probabilistic number theory, 2021.

[3] Hardy, G.H., Wright, E.M.: An Introduction to the Theory of Numbers (6th ed.), Oxford University Press, 2008.

相关链接: https://en.wikipedia.org/wiki/Coprime_integers#Probabilities